УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Факультета фундаментальной науки, университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам. Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

ТЕОРЕМА ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ ЛИНЕЙНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала в комплексном пространстве непрерывных финитных функций. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова*:* *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал.*

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

THEOREM ON THE GENERAL FORM OF A LINEAR CONTINUOUS FUNCTIONAL IN THE SPACE OF CONTINUOUS FINITE FUNCTIONS

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on the general form of a linear continuous* *functional in the complex space of continuous compactly supported functions. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional.*

Сначала вводим некоторые обозначения:

$\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; $C(z_0, r) = \{z : \|z - z_0\| < r\}$; $B(z_0, r) = \{z : \|z - z_0\| \le r\}$.

Φ – это линейное пространство непрерывных финитных функций на $\mathbb{R}_0^n$. Будут рассматриваться как вещественные, так и комплексные пространства Φ.

Напомним теперь некоторые определения и результаты из теории интеграла и меры.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_0^n$ определена вещественная борелевская мера μ, $E \subset \mathbb{R}_0^n$ – борелевское множество. Ограничением (сужением) меры μ на множество E называется мер μ_E, которая определяется формулой $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ для любого борелевского мно-жества $A \subset \mathbb{R}_0^n$.

Величина $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, называется полной вариацией или модулем меры μ.

Вещественная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_0^n$ называется локально конечной, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $|\mu|(K) < \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ семейство функций множеств , представимых в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 вещественные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. функция μ определена на борелевских множествах $E \subset \mathbb{R}_0^n$ за исключением тех E, для которых $\mu_1(E) = \mu_2(E)$.

Теорема 1. (С.М [4]). Всякий элемент $\mu \in \mathfrak{M}_1$ эквивалентен разности $\mu_1 - \mu_2$, где где μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. Причем μ_1 и μ_2 определяются однозначно.

Вещественной радоновой мерой на $\mathbb{R}_0^n$ называется класс эквивалентных элементов из множества $\mathfrak{M}_1$. Множество таких мер обозначим $\mathfrak{R}$.

Из теоремы 1 легко следует, что множество $\mathfrak{R}$ является вещественным линейным пространством. Проверить это свойство, исходя из определении $\mathfrak{R}$, достаточно затруднительно.

Мы будем рассматривать также комплексные меры Радона. Это функции множеств вида $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 , μ_2 – вещественные радоновые меры. Ограничение меры μ на множество E определяется по формуле $\mu_E = (\mu_1)_E + i(\mu_2)_E$. Комплексная мера Радона μ сосредоточена на множестве E, если выполняется равенство $\mu = \mu_E$.

Обозначим через $\mathfrak{R}_C$ – это множество комплексных радоновых мер на $\mathbb{R}_0^n$. Отметим, что $\mathfrak{R}_C$ является комплексным линейным пространством. В пространстве $\mathfrak{R}_C$ вводится понятие широкой сходимости. Говорят, что последовательность радоновых мер μ_m широко сходится к радоновой мере μ , если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ числовая последовательность $\mu_m(\varphi)$ сходится к $\mu(\varphi)$. Обозначение $\mu = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_m$.

Вводятся некоторые понятия множеств, связанные с пространством $\mathfrak{R}_C$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется широко ограниченным, если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\mu\in E}|\mu(\varphi)| < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется сильным ограниченным, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\mu\in E}|\mu|(K) < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется компактным, если из любой последовательности $\mu_m \subset E$ можно извлечь широко сходящуюся подпоследовательность.

Компактный множество в $\mathfrak{R}_C$, содержащее пределы широко сходящихся последовательностей элементов этого множества, называется компактом.

Теорема (об общем виде линейного непрерывного функционала в комплексном пространстве $\boldsymbol{\Phi(\mathbb{R}_0^n)}$). Для того, чтобы T был линейным непрерывным функционалом в пространстве $\Phi(\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}})$, необходимо и достаточно, чтобы существовала мера $\mu \in \mathfrak{R}_C$ такая, что $(T,\varphi)=(\mu,\varphi)$. Причём мера μ определяется функционалом T однозначно.

Доказательство.

Видно, что (μ,φ) – линейный функционал, из неравенства $|(\mu,\varphi)| \leq |\mu|(\operatorname{supp}\varphi)\|\varphi\|$ и определения сходимости в пространстве $\Phi(\mathbb{R}_0^n)$ следует, что (μ,φ) – линейный непре-рывный функционал в пространстве $\Phi(\mathbb{R}_0^n)$. Итак нам надо доказать вторую часть теоремы. Заметим, что единственность меры μ следует из предыдущей теоремы. Осталось доказать, что для любого линейного непрерывного функционала T существует мера $\mu \in \mathfrak{R}_C$ такая, что $(T,\mu)=(\mu,\varphi)$.

Докажем теперь что, для любого $m \geq 2$ существует константа M_m такая, что если $\operatorname{supp}\varphi \subset \left(B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$, то выполняется неравенство $|(T,\varphi)| \leq M_m\|\varphi\|$. Если это утверждение не верно, то существует $m \geq 2$ и последовательность $\varphi_m \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ такие, что $\|\varphi_m\|=1$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \left(B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$, $|(T,\varphi_m)| \geq 4^m$. Пусть $h_m=2^{-m}\varphi_m$. Тогда h_m сходится к нулю в пространстве $\Phi(\mathbb{R}_0^n)$, $|(T,h_m)| \geq 2^m$. Это противоречит непрерывности функционала T. Таким образом существование константы M_m доказано.

Теперь рассмотрим банахово пространство $C\left(B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$ и линейное много-бразие L_m этого пространства, состоящее из тех функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$, для которых $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)$. Пусть T_m ограничение функционала T на пространство L_m. Если $\varphi \in L_m$, то выполняется следующее соотношение

$$|(T_m,\varphi)|=|(T,\varphi)| \leq M_m\|\varphi\|.$$

По теореме Хана-Банаха существует расширение $\overline{T}_m$ функционала T_m на пространство $C\left(B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$ такое, что для любого $\varphi \in C\left(B(0,m)\backslash\right.$

$C\left(0,\frac{1}{m}\right)\Big)$ будем иметь $\left|\left(\overline{T}_m,\varphi\right)\right| \le M_m\|\varphi\|$. По теореме Рисса существует конечная борелевская мера $\hat{v}_m$ на компакте $\left(B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$ такая, что для любого $\varphi \in C\left(B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$ будет выполняться равенство $\left(\overline{T}_m,\varphi\right) = (\hat{v}_m,\varphi)$. Меру можно рассматривать как борелевскую меру на $\mathbb{R}_0^n$, считая её равной нулю вне $\left(B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$.

Покажем теперь, что ограничение мер $\hat{v}_{m+1}$ и $\hat{v}_{m+2}$ на компакт $B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ совп-адают. Пусть $\delta \in \left(0,\frac{1}{m(m+1)}\right)$, $\tilde{\psi} \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ такая функция, что на компакте $B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ она совпадает с произвольной наперёд заданной непрерывной функцией $\psi(x)$ и пусть $\tilde{\psi}(x) = 0$ на $B\left(0,\frac{1}{m}-\delta\right)\backslash\{0\}$ и на $\mathbb{R}_0^n\backslash C(0,m+\delta)$. Из теоремы Урысона следует, что $\tilde{\psi}(x)$ продолжается до непрерывной функции в пространстве $\mathbb{R}_0^n$, причём $\|\tilde{\psi}\| = \|\psi\|$. поэтому выполняются соотношение $\tilde{\psi} \in L_{m+1}$, $\tilde{\psi} \in L_{m+2}$. Поэтому

$$\left(T,\tilde{\psi}\right) = \left(T_{m+1},\tilde{\psi}\right) = \left(\overline{T}_{m+1},\tilde{\psi}\right) = \int_{\mathbb{R}_0^n} \tilde{\psi}(x)d\hat{v}_{m+1}(x),$$

$$\left(T,\tilde{\psi}\right) = \left(T_{m+2},\tilde{\psi}\right) = \left(\overline{T}_{m+2},\tilde{\psi}\right) = \int_{\mathbb{R}_0^n} \tilde{\psi}(x)d\hat{v}_{m+2}(x).$$

Мы получили равенство

$$\int_{\mathbb{R}_0^n} \tilde{\psi}(x)\left(d\hat{v}_{m+2}(x) - d\hat{v}_{m+1}(x)\right) = 0.$$

Можем переписать в виде

$$\int_{B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)} \tilde{\psi}(x)\left(d\hat{v}_{m+2}(x) - d\hat{v}_{m+1}(x)\right) = \int_{B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}-\delta\right)} \tilde{\psi}(x)d\hat{v}_{m+1}(x) +$$

$$+\int\limits_{B(0,m+\delta)\backslash C(0,m)} \tilde{\psi}(x)d\hat{v}_{m+1}(x) - \int\limits_{B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}-\delta\right)} \tilde{\psi}(x)d\hat{v}_{m+2}(x)$$

$$-\int\limits_{B(0,m+\delta)\backslash C(0,m)} \tilde{\psi}(x)d\hat{v}_{m+2}(x).$$

Каждый из интегралов в правой части написанного равенства стремится к нулю при $\delta \to 0$, получим равенство

$$\int\limits_{B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)} \tilde{\psi}(x)\big(d\hat{v}_{m+2}(x) - d\hat{v}_{m+1}(x)\big) = 0.$$

Так как $\psi(x) \in C\left(B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$ произвольная функция, то отсюда следует, что ограничения мер $\hat{v}_{m+1}$ и $\hat{v}_{m+2}$ на компакте $B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ совпадают.

Теперь для любого $m \geq 2$ определим меру v_m как ограничение меры $\hat{v}_{m+1}$ на компакте $B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)$. Если $k \geq m$, то ограничение меры v_k на компакте $B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ совпадают с мерой v_m. Тогда существует радонова мера $\mu \in \Re_C$ такая, что ограничение μ на компакте $B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)$. совпадает с v_m.

Теперь заканчиваем доказательство теоремы. Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ – произвольная функ-ция. Существует такое $m \geq 2$, что $\operatorname{supp}\varphi \in B(0,m)\backslash C\left(0,\frac{1}{m}\right)$. Тогда $\varphi \in L_{m+1}$,

$$(T,\varphi) = (T_{m+1},\varphi) = \left(\overline{T}_{m+1},\varphi\right) = \int\limits_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(x)d\,\hat{v}_{m+1}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(x)d\,\hat{v}_m(x)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(x)d\,\mu(x) = (\mu,\varphi).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021),